EPREUVE DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Durée : 3 heures - Coefficient : 4

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

L'objet du problème est d'étudier un modèle mathématique, dû à Volterra, utilisé en écologie pour étudier l'évolution de deux populations, l'une étant constituée de proies et l'autre de prédateurs ; dans ce modèle on suppose que le milieu ambiant est sans influence. A tout instant t, on note p(t) l'effectif des proies et q(t) celui des prédateurs (exprimés dans des unités convenables). La loi de Volterra se traduit par le système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = (a_1 - b_1 q)p \\ \frac{dq}{dt} = (-a_2 + b_2 p)q \end{cases}$$

où a_1, b_1, a_2, b_2 sont des constantes strictement positives, et où p(0) et q(0) sont donnés, strictement positifs. Ce système admet une solution constante $t \mapsto \left(\frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}\right)$, correspondant à un état d'équilibre entre les deux populations. Pour mesurer l'écart de l'évolution du système par rapport à cet équilibre, on pose $p = \frac{a_2}{b_2}(1+x)$ et $q = \frac{a_1}{b_1}(1+y)$, ce qui conduit à étudier les solutions (φ, ψ) de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0 du problème de Cauchy

$$(S) \begin{cases} x' = -a_1(1+x)y & x(0) = x_0 \\ y' = a_2(1+y)x & y(0) = y_0 \end{cases}$$

où (x_0, y_0) appartient à $U =]-1,+\infty[\times]-1,+\infty[$.

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, l'évolution du système est représentée par la courbe paramétrée $t \mapsto M(t) = (\varphi(t), \psi(t))$.

Dans la partie I, on étudie une intégrale première de (S), que l'on utilise ensuite pour étudier les solutions de (S), ce qui fait l'objet de la partie II.

I - ETUDE D'UNE INTEGRALE PREMIERE DE (S)

1. OBTENTION D'UNE INTEGRALE PREMIERE.

On suppose que (φ, ψ) est une solution sur I de (S) et que, pour tout élément t de I, M(t) appartient à U.

a) Etablir que, sur I,

$$a_2 \frac{\varphi\varphi'}{1+\varphi} + a_1 \frac{\psi\psi'}{1+\psi} = 0.$$

b) En déduire que, sur I,

(1) $\quad a_2\left[\varphi - \ln(1+\varphi)\right] + a_1\left[\psi - \ln(1+\psi)\right] = k,$

où k est une constante que l'on exprimera en fonction de x_0 et y_0.

2. ETUDE D'UNE FONCTION AUXILIAIRE.

Dans toute la suite, on note h la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $h(u) = u - \ln(1+u)$.

a) Etudier le sens de variation de h et son signe. Etudier la convexité de h. Tracer la courbe représentative C de h.

b) En déduire, que, sous les hypothèses de 1, $k \geq 0$. Prouver que k=0 si et seulement si $\varphi(0) = \psi(0) = 0$. Quelle est alors la solution de (S) ? Dans toute la suite, on écartera ce cas, de sorte que k>0.

c) On note h_1 et h_2 les restrictions de h à $[0,+\infty[$ et à $]-1,0]$. Montrer que h_1 est un homéomorphisme de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$ et induit un difféomorphisme de classe C^∞ de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$. Etudier de même h_2. Prouver, qu'au voisinage de 0, $h_1^{-1}(v) \sim \sqrt{2v}$ et $h_2^{-1}(v) \sim -\sqrt{2v}$.

d) Dans toute la suite, pour tout nombre réel k>0, on note Γ_k l'ensemble des points (x,y) de U tels que

(2) $\quad a_2 h(x) + a_1 h(y) = k.$

Soit (x,y) un point de Γ_k. Prouver que $h(x) \leq \frac{k}{a_2}$ et $h(y) \leq \frac{k}{a_1}$. En déduire que x appartient à $[\alpha,\beta]$, où $\alpha = h_2^{-1}\left(\frac{k}{a_2}\right)$ et $\beta = h_1^{-1}\left(\frac{k}{a_2}\right)$ et que y appartient à $[\gamma,\delta]$, où $\gamma = h_2^{-1}\left(\frac{k}{a_1}\right)$ et $\delta = h_1^{-1}\left(\frac{k}{a_1}\right)$.

A SUIVRE

e) Prouver que $-\alpha<\beta$ et $-\gamma<\delta$. En supposant par exemple que $a_1<a_2$, comparer β et δ, ainsi que α et γ.

f) On note g la fonction définie sur $[\alpha,\beta]$ par

(3) $\quad g(u)=\frac{k}{a_1}-\frac{a_2}{a_1}\,h(u)$.

Etudier les variations et le signe de g.

3. ETUDE DES COURBES Γ_k.

On note f_1 et f_2 les fonctions définies sur $[\alpha,\beta]$ par $f_1=h_1^{-1}\circ g$ et $f_2=h_2^{-1}\circ g$.

a) Prouver que Γ_k est la réunion du graphe de f_1 et du graphe de f_2.

b) Etudier la continuité et la différentiabilité de f_1 et f_2, ainsi que leurs variations sur $[\alpha,\beta]$. Prouver que le maximum de f_1 est δ et que le minimum de f_2 est γ.

Prouver qu'il existe des nombres λ et μ strictement positifs tels que, au voisinage de α, $f_1(u)\sim\lambda\sqrt{u-\alpha}$ et $f_2(u)\sim-\lambda\sqrt{u-\alpha}$, et que, au voisinage de β, $f_1(u)\sim\mu\sqrt{\beta-u}$ et $f_2(u)\sim-\mu\sqrt{\beta-u}$.

Montrer que f_1 est concave et que f_2 est convexe.

c) En déduire l'allure de Γ_k lorsque par exemple $a_2>a_1$. Lorsque $a_2=a_1$, montrer que Γ_k admet un axe de symétrie.

d) Prouver que, par tout élément (x_0,y_0) de U, il passe une courbe Γ_k est une seule. Déterminer et représenter l'ensemble Λ_k des points (x,y) de U tels que $a_2h(x)+a_1h(y)\leq k$.

4. EXISTENCE D'UNE INTEGRALE PREMIERE ET ENCADREMENT DES SOLUTIONS DE (S).

Soit (φ,ψ) une solution de (S) de classe C^1 sur I. On pose $k=a_2h(x_0)+a_1h(y_0)$. On se propose de prouver que pour tout élément t de I, $M(t)=(\varphi(t),\psi(t))$ appartient à Γ_k, et que, par suite, $\varphi(t)\in[\alpha,\beta]$ et $\psi(t)\in[\gamma,\delta]$.

A cet effet, on introduit l'ensemble J_+ des éléments s de $I\cap[0,+\infty[$ tels que, pour tout $t\in[0,s]$, M(t) appartient à Γ_k. (Le cas de $I\cap]-\infty,0]$ est analogue).

a) Prouver que J_+ est un intervalle d'origine 0.

b) Montrer qu'il existe un élément s de $I\cap]0,+\infty[$ tel que, pour tout $t\in[0,s]$, $(\varphi(t),\psi(t))\in U$.

A l'aide de 1, montrer que s appartient à J_+.

c) On suppose par l'absurde que $J_+\neq I\cap[0,+\infty[$ et on note c la borne supérieure de J_+. Prouver que pour tout $t\in[0,c[$ M(t) appartient à Γ_k. En déduire que, pour tout élément t de $[0,c]$, $\varphi(t)\in[\alpha,\beta]$ et $\psi(t)\in[\gamma,\delta]$ et que M(c) appartient à Γ_k. Prouver qu'il existerait alors un élément de J_+ strictement supérieur à c et conclure.

II - ETUDE DES SOLUTIONS DE (S).

1. INVARIANCE DE (S) PAR TRANSLATION.

On suppose donnés une solution (φ,ψ) de (S) sur $I=[t_1,t_2]$ et un nombre réel s. On désigne par $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ les fonctions définies sur $I_s=[t_1+s,\ t_2+s[$ par $\tilde{\varphi}(t)=\varphi(t-s)$ et $\tilde{\psi}(t)=\psi(t-s)$. Montrer que $(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})$ est solution de (S) sur I_s, satisfaisant aux conditions initiales $\tilde{\varphi}(s)=x_0$ et $\tilde{\psi}(s)=y_0$.

2. EXPRESSION ET VARIATION D'UNE SOLUTION DE (S).

On suppose donnée une solution (φ,ψ) de (S) de classe C^1 un intervalle $I=[t_1,t_2]$ contenant 0 telle que pour tout $t\in I$, $\psi(t)>0$. On pose $k=a_2h(x_0)+a_1h(y_0)$, on conserve les notations précédentes, et on pose $x_1=\varphi(t_1)$ et $x_2=\varphi(t_2)$. Prouver que, sur I, $\varphi'=-a_1(1+\varphi)f_1\circ\varphi$. En déduire que φ est strictement décroissante sur I, que $[x_2,x_1]\subset[\alpha,\beta]$ et que φ est la fonction réciproque de la fonction F définie sur $[x_2,x_1]$ par $F(x)=-\frac{1}{a_1}\int_{x_0}^{x}\frac{du}{(1+u)f_1(u)}$. Enoncer un résultat analogue lorsque pour tout $t\in I$, $\psi(t)<0$.

Tournez la page S.V.P.

3. CONSTRUCTION DE SOLUTIONS PERIODIQUES DE (S).

Soit k un nombre réel strictement positif.

a) Etablir la convergence des intégrales

$$\int_{\alpha}^{0} \frac{du}{(1+u)f_1(u)} \quad \text{et} \quad \int_{0}^{\beta} \frac{du}{(1+u)f_1(u)},$$

ainsi que celle des intégrales analogues où f_1 est remplacée par f_2.

Dans toute la suite, on note F_k et G_k les fonctions définies sur $[\alpha,\beta]$ par les relations

(4) $$F_k(x)=\frac{1}{a_1}\int_{x}^{\beta} \frac{du}{(1+u)f_1(u)} \quad \text{et} \quad G_k(x)=\frac{-1}{a_1}\int_{\alpha}^{x} \frac{du}{(1+u)f_2(u)}.$$

b) Etudier la continuité de la dérivabilité de F_k et G_k sur $[\alpha,\beta]$ ainsi que leur sens de variation et leur signe.

c) Dans toute la suite, on pose $\tau_1=F_k(\alpha)$, $\tau_2=G_k(\beta)$ et $\tau=\tau_1+\tau_2$ et on désigne par φ_k et ψ_k les fonctions τ-périodiques définies sur $\mathbb{R}$ par

(5)
$$\varphi_k(t)=F_k^{-1}(t) \text{ et } \psi_k(t)=f_1(\varphi_k(t)) \text{ si } t\in[0,\tau_1[$$
$$\varphi_k(t)=G_k^{-1}(t-\tau_1) \text{ et } \psi_k(t)=f_2(\varphi_k(t)) \text{ si } t\in]\tau_1,\tau[.$$

Prouver que $\varphi_k(0)=\beta$ et $\psi_k(0)=0$, $\varphi_k(\tau_1)=\alpha$ et $\psi_k(\tau_1)=0$, $\varphi_k(\tau)=\beta$ et $\psi_k(\tau)=0$.

Montrer que φ_k et ψ_k sont continues sur $\mathbb{R}$.

d) Etablir que sur $]0,\tau_1[$ et $]\tau_1,\tau[$, φ_k et ψ_k sont de classe C^1 et que, sur chacun de ces intervalles,

(6)
$$\begin{cases} \varphi_k'=-a_1(1+\varphi_k)\psi_k \\ \psi_k'=a_2(1+\psi_k)\varphi_k \end{cases}$$

En déduire que φ_k et ψ_k sont de classe C^1 sur $[0,\tau_1]$ et $[\tau_1,\tau]$.

e) Prouver finalement que (φ_k,ψ_k) est une solution τ-périodique de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy (S) satisfaisant aux conditions initiales $\varphi_k(0)=\beta$ et $\psi_k(0)=0$.

Etudier les variations de φ_k et ψ_k sur $[0,\tau]$ et indiquer comment $M_k(t)=(\varphi_k(t),\psi_k(t))$ parcourt Γ_k.

f) Prouver que (φ_k,ψ_k) est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy précédent.

A cet effet on considèrera une solution (φ,ψ) de ce problème et on raisonnera comme au I.4, en introduisant l'ensemble J_+ des nombres réels $s\geq 0$ tels que pour tout élément t de $[0,s]$, $\varphi(t)=\varphi_k(t)$ et $\psi(t)=\psi_k(t)$. (Pour montrer que $J_+\neq\{0\}$, on procèdera comme au II.1, en prouvant d'abord, grâce au signe de $\psi'(0)$, que $\psi(t)$ est strictement positif sur un intervalle $]0,s]$ assez petit.)

4. EXISTENCE ET UNICITE D'UNE SOLUTION SUR $\mathbb{R}$ DU PROBLEME DE CAUCHY (S).

Soit (x_0,y_0) un point de U et $k=a_2h(x_0)+a_1h(y_0)$.

a) Prouver qu'il existe un nombre réel s et un seul appartenant à $[0,\tau[$ tel que $M_k(s)=(x_0,y_0)$. Soient alors φ et ψ les fonctions τ-périodiques définies sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t)=\varphi_k(t+s)$ et $\psi(t)=\psi_k(t+s)$.

Prouver que (φ,ψ) est solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy (S), telle que $M(0)=(x_0,y_0)$.

b) Etablir que (φ,ψ) est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de ce problème de Cauchy.

5. VALEURS MOYENNES SUR UNE PERIODE DES SOLUTIONS.

Soit (φ,ψ) une solution τ-périodique de (S). Prouver que φ et ψ sont de moyenne nulle sur une période $[s,s+\tau]$.

6. INTERPRETATION DES RESULTATS.

a) On revient aux populations p(t) et q(t) introduites en tête de l'énoncé. Prouver que l'évolution est cyclique de période τ et calculer les moyennes p_0 et q_0 de p(t) et de q(t) sur un tel cycle.

b) On détruit simultanément les deux populations dans un même pourcentage, ce qui revient à remplacer (a_1,a_2) par (a_1-m,a_2+m), où $0<m<a_1$. Montrer que p_0 augmente, alors que q_0 diminue.

FIN